

# Travaux dirigés: Série 1 - Électricité II

September 11, 2014

**Abstract**

Electricité II  
Travaux Dirigés: Série 1

**Exercice I :** *Rappels et compléments mathématiques*

- 1) Gradient d'une fonction scalaire,
  - a) Donner  $\text{grad } V = \vec{\nabla} V$  en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques,
  - b) En déduire l'expression de  $\text{grad} \left(\frac{1}{r}\right)$ ,
- 2) Divergence d'un vecteur,  
Donner  $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques,
- 3) Rotationnel d'un vecteur,
  - a) Donner  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  en coordonnées cartésiennes,
  - b) En déduire : (i)  $\vec{\nabla} \wedge \text{grad } V$ , (ii)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ ,
- 4) Calcul intégral,
  - a) Donner le théorème de Green Ostogradsky reliant une intégrale triple à une intégrale double,
  - b) Donner le théorème de Stokes reliant une intégrale double à une simple.

**Exercice II:** *champ  $\vec{B}$  créé par une boucle de courant*

Un courant d'intensité  $I$  circule dans une spire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On se propose de calculer le champ d'induction magnétique  $\vec{b}(M)$  créé au point  $M$  de l'axe  $\vec{Oz}$  de la spire.

- 1) Par des considérations de symétrie, déterminer:
  - a) Les variables dont dépend  $\vec{b}(M)$ ,
  - b) La direction de  $\vec{b}(M)$ ,
- 2) A l'aide de la loi de Biot et Savart, déterminer:
  - a) L'expression du champ  $\vec{b}(M)$  en fonction de  $z$ ,
  - b) L'expression de  $\vec{b}(M)$  en l'angle  $\alpha$ ,
- 3) En déduire la valeur du champ:
  - a) Au centre de la spire, point  $z = 0$ ,
  - b) Dans la limite  $z$  tend vers l'infini,
- 4) Un enroulement de spires jointives identiques d'épaisseurs très faibles vis-à-vis des rayons des spires constitue une *bobine plate*.
  - a) Déduire de la question précédente le champ d'induction  $\vec{B}(z)$  de la bobine,
  - b) Justifier la réponse,
- 5) Calculer circulation de  $\vec{B}(z)$  le long de tout l'axe  $\vec{Oz}$

**Exercice III:** *champ  $\vec{B}$  crée par un solénoïde*

Un solénoïde *S fini* est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre d'axe  $\Delta$  que nous prenons  $\vec{Oz}$ . Le fil, parcouru un courant permanent  $I$ , est suffisamment mince permettant d'imaginer le solénoïde comme une juxtaposition continue de spires coaxiales de rayon  $R$  d'axe  $\vec{Oz}$ ,

- 1) Faire un schéma illustratif, on notera les angles limites  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ,
- 2) Si pour une épaisseur  $dz$  autour du point P du solénoïde, nous avons N spires ; donner la densité  $dn$  de spires par unité de longueur du solénoïde,
- 3) On se propose de calculer le champ d'induction *sur l'axe* du solénoïde,
  - a) Donner l'expression du champ élémentaire  $d\vec{B}$  en fonction de  $\vec{b}(z)$ ,
  - b) Calculer le champ total  $\vec{B}(z)$  en fonction de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ,
- 4) En déduire la valeur du champ pour le cas d'un solénoïde infini

**Exercice IV:** *champ  $\vec{B}$  et potentiel vecteur  $\vec{A}$*

On considère un conducteur cylindrique homogène de base circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$  *supposée grande* ( $L$  tendant vers l'infini). Ce conducteur est parcouru par un courant volumique axial d'intensité  $I$  et de densité volumique  $\vec{j} = j\vec{e}_z$ .

- 1) Par des considérations de symétrie, déterminer:
  - a) Les variables dont dépend l'induction magnétique  $\vec{B}(M)$ ,
  - b) La direction de  $\vec{B}(M)$ ,
  - c) Vérifier que  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,
- 2) Déterminer l'expression du champ  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace,
- 3) Déterminer les variables dont dépend le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ ,
- 4) Déterminer la direction de  $\vec{A}(M)$ ,
- 5) Vérifier que  $\text{div } \vec{A} = 0$ ,
- 6) A partir de la relation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ , déterminer l'expression de  $\vec{A}(M)$  en tout point de l'espace,
- 7) En déduire la constante d'intégration pour la condition  $\vec{A}(\rho = R)$ .

# Solution

## Exercice I: Rappels et compléments mathématiques

### 1) Gradient d'une fonction scalaire

(a) en coordonnées cylindriques

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

en coordonnées sphériques

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

(b) En déduire l'expression de  $\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right)$

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

### 2) Divergence d'un vecteur

(a) en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

en sphériques

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{r \sin \theta \partial \varphi}$$

(b) a priori

$$\text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (1)}{\partial r} = 0!$$

mais ceci n'est vrai que pour  $r \neq 0$ . Pour  $r = 0$ , cette quantité diverge; en effet on sait que pour le champ électrostatique  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ , on a:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \neq 0$$

ce qui conduit à:

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \frac{\rho}{q}, \quad \rho = q\delta(r), \quad \text{avec } \delta \text{ distribution de Dirac}$$

3) Rotationnel d'un vecteur

(a) Donner  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \\ \frac{\partial}{\partial z} & & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } V) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V = \vec{0} \\ \text{div}(\text{rot } \vec{A}) &= 0 \end{aligned}$$

4) relations de Stokes

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div } \vec{E} d\tau &= \iint_{\Sigma=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} & : \text{ Relation 1: Green-Ostogradsky} \\ \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} & : \text{ Relation 2: Stokes} \end{aligned}$$

**Exercice II:** *champ  $\vec{B}$  créée par une boucle de courant pour des détails voir section 4.2 du cours*

1) i)  $\vec{b} = \vec{b}(z)$ , ii)  $\vec{b} = b(z) \vec{e}_z$

2) loi de Biot et Savart

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

3) valeur du champ:

(a) Au centre de la spire: point  $z = 0$

$$\vec{b} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

(b) Dans la limite  $z$  tend vers l'infini

$$\vec{b} \rightarrow \vec{0}$$

4) bobine plate.

Le champ  $\vec{B}$  est obtenu par application du

*principe de superposition*

c'est à dire que le champ total  $\vec{B}(z)$  créé par la bobine est la somme des champs créés par chacune des N spires:  $N\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2R} \frac{b^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z\end{aligned}$$

5) circulation de B le long de tout l'axe  $\vec{Oz}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} B dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \alpha \right) dz\end{aligned}$$

Ensuite utilisons les relations

$$\begin{aligned}\sin^3 \alpha &= \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tan \alpha &= \frac{R}{z} \\ z &= \frac{R}{\tan \alpha} = R \cot \alpha = R \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ dz &= \frac{-R}{\sin^2 \alpha} d\alpha\end{aligned}$$

et les bornes

$$\begin{aligned}z = -\infty &\iff \alpha = \pi^- \\ z = \infty &\iff \alpha = 0^+\end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} B dz &= \int_{\pi^-}^{0^+} \left( \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \alpha \right) \frac{-R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \int_{\pi^-}^{0^+} \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2} \int_{\pi^-}^{0^+} d(\cos \alpha) \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2} [\cos \alpha]_{\pi}^0 \\ &= \mu_0 NI\end{aligned}$$

**Exercice III:** champ  $\vec{B}$  créé par un solénoïde  $\mathbb{S}$

voir sous -section 4.3 du cours:

On considerera 2 cas:

- solénoïde fini avec:  $-z_1 < z < z_2$   
ou encore d'ouverture vu de M donnée par  $\alpha_1, \alpha_2$ ,
- solénoïde infini avec:  $-\infty < z < \infty$   
ou encore  $\alpha_1 = \pi, \alpha_2 = 0$ .

1) *schéma illustratif*, voir fig

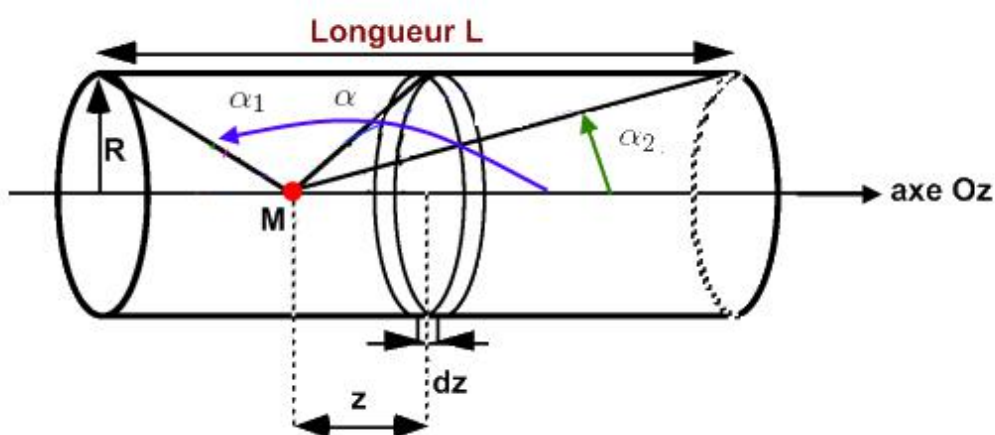


Figure 1: Induction magnétique créé par un solénoïde d'axe  $\vec{OZ}$

avec

$$dz = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

2) densité  $dn$  de spires par unité de longueur du solénoïde  $\mathbb{S}$

Pour calculer le champ  $\vec{B}$  créé par  $\mathbb{S}$  en un point  $M \in \vec{Oz}$ , on suppose que:

i) le fil est suffisamment mince et imaginer:

le solénoïde  $\mathbb{S}$  comme une juxtaposition *continue* de spires coaxiales  $\mathcal{S}_i$  de rayon  $R$  d'axe  $\vec{Oz}$ ,

ii) pour une épaisseur  $dz$  autour du point  $P$  du solénoïde, nous avons  $N$  spires.

$$dz \rightarrow N \text{ spires}$$

Cela veut dire que la densité  $dn$  de spires par *unité de longueur* du solénoïde est

$$\frac{dn}{dz} = N \Rightarrow dn = N dz$$

2 remarques:

✓ le solénoïde  $\mathbb{S}$  a donc les mêmes propriétés de symétrie que les spires  $\mathcal{S}_i$ .

✓ en fonction de l'angle  $\alpha$  :

$$\tan \alpha = \frac{R}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\tan \alpha} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

d'où

$$dn = -N \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

3) (a) champ élémentaire:  $d\vec{B}$

★ une spire  $\mathcal{S}$ , parcourue par  $I$ , crée un champ  $\vec{b}$ ; càd:

$$1 \text{ spire } \mathcal{S} \quad \text{créé} \quad \vec{b} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{e}_z$$

★ une densité  $dn$  de spires autour de P crée en tout point M de  $\vec{Oz}$  un champ  $d\vec{B}$

$$\begin{aligned} dn \text{ spires} \quad \text{créé} \quad d\vec{B} &= \vec{b} dn \\ &= N \vec{b} dz \\ &= -N \vec{b} \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

Remplaçons  $\vec{b}$  par sa valeur, on a:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= -\left(N \times \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R} \vec{e}_z\right) \times \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{\mu_0 NI}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

(b) champ total:  $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B} \\ &= -\vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 IN \sin^3 \alpha}{2R} \times \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha} = -\vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 IN}{2} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{B}(z) = \mu_0 IN \frac{(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{2} \vec{e}_z$$

4) Solénoïde *infini*:  $\alpha_1 = \pi$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 IN \vec{e}_z \\ &= \overrightarrow{cte} \end{aligned}$$

sur l'axe  $\vec{Oz}$  le champ  $\vec{B}$  est constant



**Exercice IV:** champ  $\vec{B}$  et potentiel vecteur  $\vec{A}$   
schéma illustratif: voir fig 2

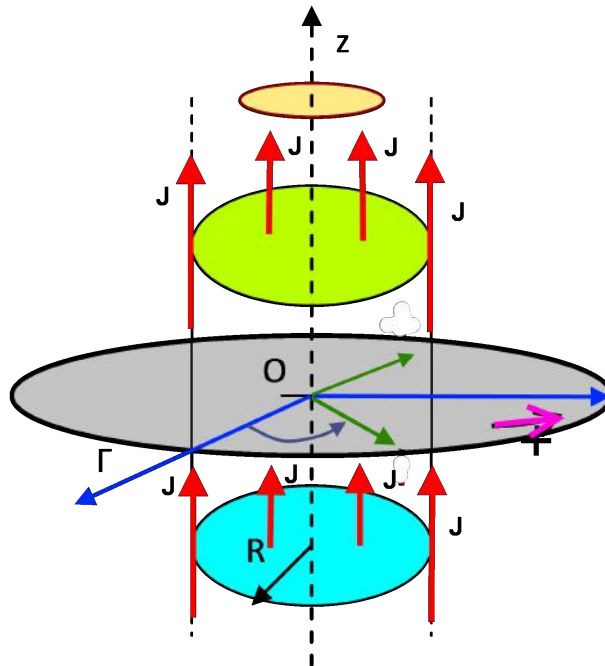


Figure 2: conducteur cylindrique parcouru par  $J = j e_z$ . Coordonnées  $M = (\rho, \varphi, z)$ .  $\Gamma$  est la courbe d'Ampère.

1) Propriétés de symétrie de  $\vec{B}(M)$

(a) symétrie cylindrique implique (ici L est supposé infini)

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

(b) direction de  $\vec{B}$  : le plan

$$\Pi_s \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \perp \vec{e}_\varphi \quad \text{contenant } M$$

est un plan de symétrie du conducteur. Ceci implique

$$\vec{B} \perp \Pi_s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$$

(c) calcul de  $\text{div } \vec{B}$  :

En coordonnées cylindriques, on a:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ &= \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} = 0 \quad \text{car } B_\varphi = B_\varphi(\rho) \text{ ne dépendant ni de } \varphi \text{ ni de } z \end{aligned}$$

2) Expression du champ  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace

★ le calcul se fait par le th d'Ampère (voir chap 2 pour plus de détails sur ce th)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad : \quad \text{Théorème d'Ampère}$$

ou  $\Gamma$  est la courbe d'Ampère.

Dans notre cas,  $\Gamma$  est un cercle de rayon  $\rho$  passant par  $M$

on a aussi

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B\vec{e}_\varphi \\ d\vec{l} &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z \end{aligned}$$

soit

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \rho B d\varphi$$

Selon le choix de  $\Gamma$  on distingue deux cas:

$$\text{a) } \rho > R \quad , \quad \text{b) } \rho < R$$

i) cas  $\rho > R$

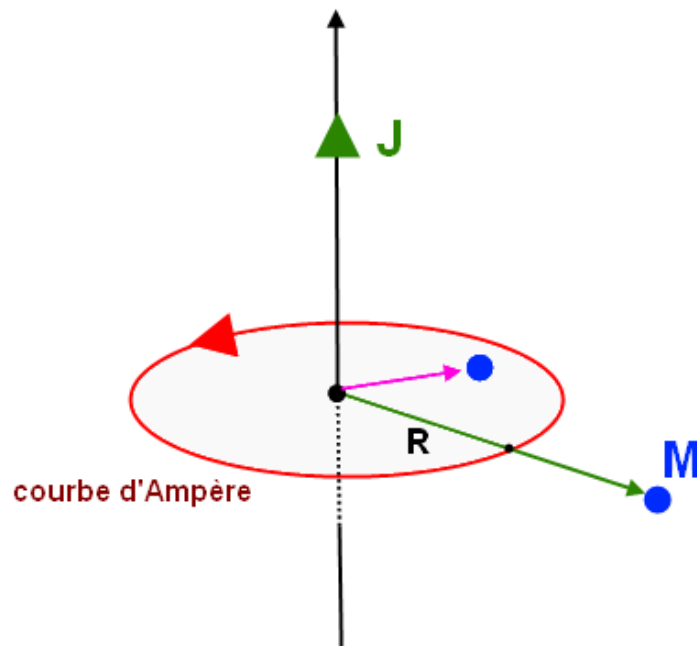


Figure 3: Courbe d'Ampère.

La courbe d'Ampère est:

un cercle de rayon  $\rho$  passant par  $M$

Comme  $\rho > R$ , le courant traversant  $\mathcal{S}$  délimitée par  $\Gamma$  est

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} j \, dS$$

avec  $\partial\mathcal{S} = \Gamma$  et

$$\begin{aligned} \vec{J} &= j \vec{e}_z \\ d\vec{S} &= dS \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où

$$I = \int_{0 \leq \rho \leq R} j \, dS + \int_{\rho > R} \underbrace{j}_{=0} \, dS$$

et donc

$$I = j\pi R^2$$

Le théorème d'Ampère implique

$$\begin{aligned} \mu_0 I &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^{2\pi} B(\rho d\varphi) \\ &= \rho B \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho B \end{aligned}$$

D'où

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \text{avec} \quad I = j\pi R^2$$

ii) cas  $\rho < R$

Dans ce cas seule une partie du courant contribue car

$$\begin{aligned} I_{int} &= \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = j \int_{\mathcal{S}} dS, \quad \partial\mathcal{S} = \Gamma \\ &= j\pi\rho^2 \\ &= (j\pi R^2) \frac{\rho^2}{R^2} \\ &= I \frac{\rho^2}{R^2} \end{aligned}$$

le théorème d'Ampère donne

$$\begin{aligned} \mu_0 j\pi\rho^2 &= \mu_0 I \frac{\rho^2}{R^2} \\ &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^{2\pi} B(\rho d\varphi) \\ &= 2\pi \rho B \end{aligned}$$

soit:

$$2\pi\rho B = \mu_0 I \frac{\rho^2}{R^2}$$

et donc

$$B = \mu_0 I \frac{\rho}{2\pi R^2}$$

3) variables de  $\vec{A}(M)$  :

symétrie cylindrique implique:

$$\vec{A} = \vec{A}(\rho)$$

il n'y a pas de variable  $z$  ni de variable  $\varphi$

4) direction de  $\vec{A}(M)$ .

Le plan de symétrie  $\Pi_s$  implique

$$\vec{A} \in \Pi_s$$

càd qu'on a chercher 2 composantes.

Mais comme le plan

$$\Pi_a = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) \text{ est un plan d'antisymétrie}$$

et que

$$\vec{A} \perp \Pi_a$$

on a

$$\vec{A} = A(\rho) \vec{e}_z$$

5) Vérifier que  $\text{div } \vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= 0, \quad \text{car ne dépend pas de } z \end{aligned}$$

6) Expression de  $\vec{A}(M)$  en tout point de l'espace

A partir de

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

soit en effectuant

$$\begin{vmatrix} B_\rho(\rho) = 0 \\ B_\varphi(\rho) \neq 0 \\ B_z(\rho) = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_\rho = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z \neq 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$B_\varphi(\rho) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \Leftrightarrow A_z = -\int B_\varphi d\rho$$

on distingue 2 cas

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \rho > R & : B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta) \quad \rho < R & : B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho}{2\pi R^2} \end{aligned}$$

$\alpha) \quad \rho > R$

$$A_z(\rho) = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + cte$$

7) la condition sur  $\vec{A}$  permet de déterminer la constante pour  $\rho = R^+$

$$A_z(\rho = R) = 0 \Rightarrow cte = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R$$

soit

$$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R}$$

$\beta) \quad \rho < R$

$$A_z(\rho) = -\int \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \rho^2 + cte'$$

La condition sur  $\vec{A}$  permet de déterminer la constante  $\rho = R^-$

$$A_z(\rho = R) = 0 \Rightarrow cte' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2$$

soit

$$\begin{aligned} A_z(\rho) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \rho^2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$